Matrizenrechnung
Anwendungen

Spiegelung an einer Geraden im Raum

Datei-Nr. 62066

Stand 24. 7. 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Spiegelung an einer Geraden g ist vektoriell mit einfachen Mitteln durchführbar.
Das wird im Text 63234 gezeigt.

In vorliegendem Text wird diese Spiegelung an einer Ursprungsgeraden allgemein durchgerechnet und das Ergebnis in eine Abbildungsgleichung umgeschrieben, so dass eine Abbildungsmatrix entsteht.

1. Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

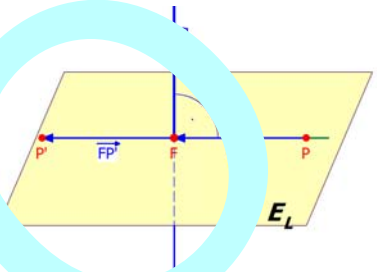
Vektorielle Herleitung der Abbildungsgleichung

Eine Ursprungsgerade g hat allgemein die Gleichung $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Zur Spiegelung eines Punktes $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ fällt man das Lot von P_1 auf g.

Dazu wähle ich die Methode „Lotebene“ (Siehe Text 64150).

Darunter versteht man eine Ebene E_L orthogonal zu g durch P_1.
Der Richtungsvektor von g ist daher auch ein Normalenvektor von E_L:



$$E_L: \quad a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Das Absolutglied d erhält man durch die Punktprobe mit P_1:

$$d = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1$$

Einsetzen: $E_L: \quad a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1$

Nun schneidet man diese Ebene mit g und erhält den Fußpunkt F des Lotes von P_1 auf g:
Man setzt g koordinatenweise ein:

$$a \cdot \boxed{ra} + b \cdot \boxed{rb} + c \cdot \boxed{rc} = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1$$

$$r \cdot a^2 + r \cdot b^2 + r \cdot c^2 = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1$$

Nach r umstellen: $r \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1$

Mit der Abkürzung $u^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$r = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{u^2}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Für das Spiegelbild P_1' gilt die Gleichung: $\overrightarrow{FP_1'} = \overrightarrow{P_1F} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_1' - \vec{f} = \vec{f} - \vec{x}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{x}_1' = 2\vec{f} - \vec{x}_1}$

Also: $\vec{x}_1' = \frac{2}{u^2} \cdot a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \vec{x}_1$

Anpassen: $\vec{x}_1' = \frac{1}{u^2} \cdot \left[2(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right]$

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{u^2} \cdot \left[2 \cdot (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - (a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right]$$

Ganz ausführlich:

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2x_1 + 2aby_1 + 2acz_1 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x_1 \\ 2abx_1 + 2b^2y_1 + 2bcz_1 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)y_1 \\ 2acx_1 + 2bcy_1 + 2c^2z_1 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)z_1 \end{pmatrix}$$

Umsortiert:

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} \left(a^2 - b^2 - c^2\right) \cdot x_1 + 2ab \cdot y_1 + 2ac \cdot z_1 \\ 2ab \cdot x_1 + \left(-a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot y_1 + 2bc \cdot z_1 \\ 2ac \cdot x_1 + 2bc \cdot y_1 + \left(-a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot z \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Ohne den Index 1 lautet dann die Abbildungsgleichung:

$$\vec{x}' = G \cdot \vec{x} \quad \text{mit} \quad G = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

G ist die Abbildungsmatrix für die Spiegelung.

Beispiel 1: Spiegle $P(5\,|\,-2\,|\,5)$ an g: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

Lösung mit Erstellung der Abbildungsmatrix mit $a = 1,\ b = 2,\ c = -2$

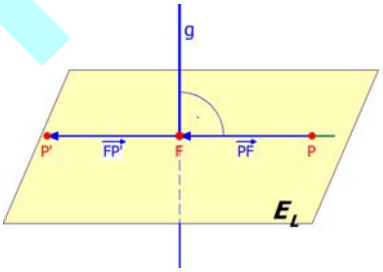
Aus $G = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2+b^2-c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2-b^2+c^2 \end{pmatrix}$

wird $\vec{x}' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

P einsetzen: $\vec{x}' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -35-8-20 \\ 20+2-4 \\ -20+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-63\\-18\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Ergebnis: $P'(-7\,|\,-2\,|\,-1)$

Lösung mit Vektorgeometrie:



Lotebene zu g durch P: $x + 2y - 2z =$

Punktprobe mit $P(5\,|\,-2\,|\,5)$: $d = \boxed{5} + 2\cdot\boxed{-2} - 2\cdot\boxed{5} =$

Lotebene: E_L: $x + 2y - 2y = -$

Schnitt mit g: $2\cdot\boxed{2r} - 2\boxed{-2r} =$

$9r = -9 \Rightarrow -1$

Lotfußpunkt: $\begin{pmatrix}\\2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow F(-1\,|\,-2\,|\,2)$

Spiegelungsbedingung: $\overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF} \Leftrightarrow \vec{x}' - \vec{f} = \vec{f} - \vec{x} \Leftrightarrow \boxed{\vec{x}' = 2\vec{f} - \vec{x}}$

$\vec{x}' = \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Ergebnis: $P'(-7\,|\,-2\,|\,-1)$